EXERCICE N°1 — 7 points — CONTROLE 2016

1°) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2e^x$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Comparer x et $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants : $x\in]0,1[$ et $x\in]1,+\infty[$.

c) En déduire que si $x\in]0,1[$ alors $g(x)<g\left(\frac{1}{x}\right)$ et que si $x\in]1,+\infty[$ alors $g(x)>g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2°) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}$ et on désigne par $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3°) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Calculer $f'(1)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Dans la figure ci-dessous, on représente, dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$,la courbe $\left(C_h\right)$ de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a) Montrer par $\left(C_f\right)$ est au-dessus de $\left(C_h\right)$.

b) Tracer la courbe $\left(C_f\right)$.

5°) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\int_1^x\left(f(t)-h(t)\right)dt=\left(x^2-4x+6\right)e^x-3e$.

b) Soit $\alpha\in]0,1]$.

Exprimer en fonction de α ,l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ de la partie du plan limitée par les courbes $\left(\zeta_f\right)$ et $\left(\zeta_h\right)$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\mathcal{A}_\alpha$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com